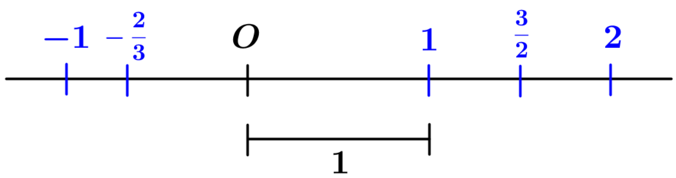
1 Racionální čísla

V samých základech matematiky stojí *přirozená čísla* (1, 2, 3, ...), neboť počítání nějakých objektů byl její prvotní úkol. Později byl číselný obor rozšířen o nulu (jako vyjádření pojmu „nic“) a záporná celá čísla (-1, -2, -3, ...) jako výraz dluhu či chybějícího množství. Souhrnně je nazýváme *celými čísly*. Dalším úkolem matematiky bylo počítání s částmi či díly nějakého celku (při vytyčování pozemku, dělení úrody apod.). K takovým výpočtům používáme zlomky čili *čísla racionální*, která zapisujeme jako poměr dvou celých čísel, např. $\frac{1}{5}$ nebo $-\frac{7}{4}$. Dobře víme, že zápis racionálních čísel není jednoznačný, neboť kupříkladu $\frac{6}{4}$, $\frac{15}{10}$ a $\frac{-3}{-2}$ reprezentují stejné číslo, často proto pracujeme se zlomky v základním tvaru, kdy čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná přirozená čísla (znaménko minus či volitelné plus vkládáme před zlomkovou čáru). Případ, kdy jmenovatel je roven 1, zároveň ukazuje, že racionální čísla v sobě zahrnují i všechna celá čísla[1], neboť např. $\frac{4}{1} = 4$.

Číselná osa

Je poměrně běžné zobrazovat čísla jako body na přímce, kde jsme zvolili bod O jako počátek a nějakou jednotkovou délku. Takovou přímku obyčejně nazýváme *číselnou osou*. Celá čísla získáme násobným nanášením jednotkové vzdálenosti od počátečního bodu O (ten odpovídá číslu 0), kladná čísla na jednu stranu, záporná směrem opačným. Protože umíme čistě geometrickými prostředky rozdělit jednotkovou úsečku na libovolný počet dílů, můžeme na číselné ose znázornit i libovolné racionální číslo (viz obr. 1). Řekněme, že bychom chtěli znázornit všechna



Obrázek 1: Číselná osa s racionálními čísly.

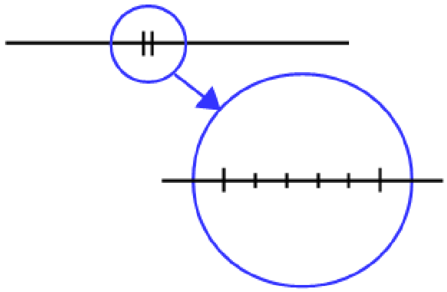
racionální čísla ležící mezi 0 a 1. Rozdělíme jednotkovou úsečku na dva shodné díly a znázorníme $\frac{1}{2}$. V dalším kroku ji rozdělíme na tři shodné díly a znázorníme čísla $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$. Pokračujeme se čtvrtinami, pětinami, šestinami atd. Brzy zjistíme, že zkoumaný interval je zdánlivě zcela zaplněn body, možná k tomuto poznání dospějeme u padesátin, možná u setin, případně až u tří-tisícin. Co dále? V popsané proceduře můžeme jistě i nadále pokračovat. Máme-li nějaká dvě různá racionální čísla a a b, vždy mezi ně můžeme umístit vybraný počet dalších racionálních čísel. Požadujeme-li např. čtyři vložená čísla, můžeme je vypočítat jako

$$\frac{4a+b}{5},\ \frac{3a+2b}{5},\ \frac{2a+3b}{5} \text{ a } \frac{a+4b}{5}\,.$$

Pokud takto vložíme čtyři další čísla[2] mezi každou dosud znázorněnou dvojici sousedních čísel, odpovídá to situaci, kdy se na číselnou osu podíváme lupou s pětinásobným zvětšením (viz obr. 2). Můžeme však použít i lupu s dvacetinásobným zvětšením nebo mikroskop se zvětšením

[1]Pravda, trochu jsme opomněli 0. Tu zapíšeme pomocí 0 v čitateli zlomku, jmenovatel je libovolný nenulový. Ve jmenovateli zlomku 0 být nemůže, neboť operace dělení 0 není definována.

[2]z jejich konstrukce vyplývá, že to skutečně jsou čísla racionální

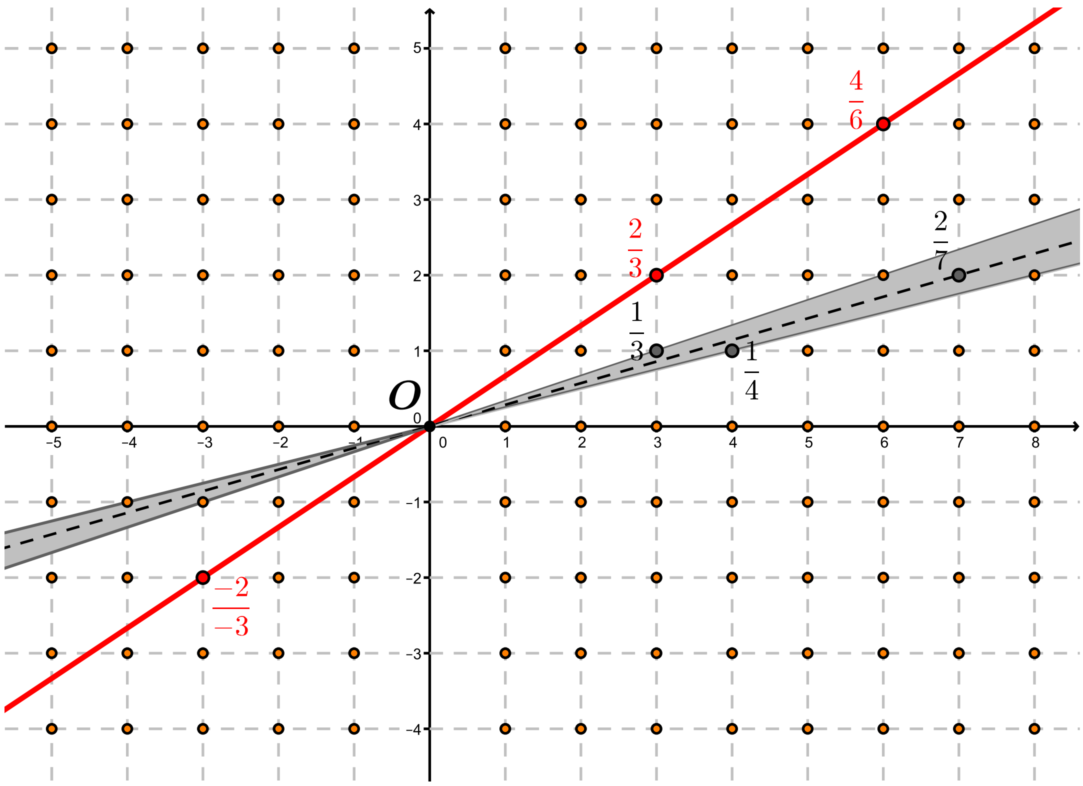


Obrázek 2: Pohled lupou na číselnou osu.

1000. Protože jsme v matematice, nemusíme se zabývat technickými a fyzikálními omezeními a lze si představit si zvětšení 10^6, 10^{20}, $10^{10^{10}}$, prostě libovolně veliké. To znamená, že do vymezeného intervalu (a podobně i na celou číselnou osu) dokážeme umístit neomezený počet různých racionálních čísel.

Reprezentace přímkami v rovině

K jinému grafickému znázornění dojdeme následujícím postupem. Zvolíme si v rovině kartézský souřadnicový systém, jehož osy se protínají v bodě O. Pro libovolný platný zlomek $\frac{p}{q}$ zobrazíme v rovině bod o celočíselných souřadnicích $[q; p]$ a propojíme jej přímkou s bodem O. Tato přímka je reprezentantem příslušného racionálního čísla (viz obr. 3). Při studiu lineárních funkcí jsme



Obrázek 3: Přímky v rovině reprezentují racionální čísla.

se naučili, že přímky procházející počátkem souřadnic lze zapsat ve tvaru $y = kx$. Směrnice k má pro náš bod hodnotu právě $\frac{p}{q}$, kterou je svázána s konkrétním racionálním číslem. Z této grafické reprezentace je zároveň dobře vidět, že např. zlomky $\frac{2}{3}$, $\frac{-2}{-3}$ a $\frac{4}{6}$ jsou vlastně totéž číslo (jejich přímky jsou totožné)[3]. Na vertikální ose se nenacházejí žádné body odpovídající zlomkům, protože 0 se nemůže vyskytovat ve jmenovateli zlomku.

V oblasti mezi přímkami, které odpovídají dvěma různým racionálním číslům, vždy nalezneme body s celočíselnými souřadnicemi. Z nich pak zkonstruujeme přímky do počátku O, které odpovídají racionálním číslům z intervalu mezi původními čísly[4]. I z této úvahy je tedy možné dovodit, že racionálních čísel je neomezené množství.

Existují iracionální čísla?

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, že dokážeme sestrojit neomezené množství racionálních čísel. Můžeme je graficky znázornit jako body na číselné ose nebo reprezentovat přímkami v rovině. Nabízí se tak otázka, zda takto sestrojené body zcela zaplní přímku, respektive zda přímky zcela zaplní rovinu.[5] Jinými slovy, existují nějaká jiná čísla, která by přirozeně zasluhovala název *iracionální*? Naše intuice nám našeptává, že nikoliv. Odpověď na tuto otázku budeme hledat v dalších dílech našeho seriálu.

[3]na obr. 3 červenou barvou

[4]Na hraničních přímkách existují body T_1 a T_2 s celočíselnými souřadnicemi $[q_1; p_1]$ a $[q_2; p_2]$ tak, že q_1 i q_2 jsou kladná. Střed S úsečky T_1T_2 má souřadnice $[(q_1 + q_2)/2; (p_1 + p_2)/2]$, které však nemusí být celočíselné. Na přímce SO ale leží také mřížový bod se souřadnicemi $[q_1 + q_2; p_1 + p_2]$, takže tato přímka skutečně reprezentuje jedno takové hledané racionální číslo. Pro čísla $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{3}$ je mezilehlý interval na obr. 3 vyznačen šedou barvou, přímka pro $\frac{2}{7}$ je zakreslena černou přerušovanou čarou.

[5]samozřejmě až na vertikální osu souřadnicového systému