6 Číslo π je iracionální

Číslo π (též Ludolfovo číslo) vstoupilo do matematiky jako poměr délky kružnice a jejího průměru. Během staletí objevili matematici velkou řadu dalších vztahů, ve kterých π vystupuje. Týká se nejen geometrie (v rovině či v prostoru), ale i řady dalších odvětví jako matematická analýza nebo teorie pravděpodobnosti.

Je to číslo v mnoha ohledech skutečně pozoruhodné. Přestože ho znali již staří Bybyloňané a Egypťané, velkou pozornost mu věnovali matematici starořečtí i staroindičtí, jeho iracionalitu dokázal až v roce 1761 Johann Heinrich Lambert. Později byla podána celá řada alternativních důkazů, přesto žádný z nich není úplně triviální. My si v následujícím textu přiblížíme postup, založený nejvíce na myšlenkách Ivana Nivena z roku 1947. Pro úplné pochopení je nutné osvojení si základních znalostí z integrálního počtu, které jsou předmětem učiva posledního ročníku studia.

Budeme vyšetřovat vlastnosti posloupnosti čísel $\{a_n\}$ pro $n \in \{0, \dots, \infty\}$, n-tý člen je definován pomocí určitého integrálu

$$a_n = \frac{q^n}{n!} \int_0^\pi [x(\pi - x)]^n \sin x \,\mathrm{d}x,$$

kde q je prozatím libovolný kladný parametr. Přímou integrací můžeme vyčíslit první dva členy a_0 (dosadíme $0! = 1$)

$$a_0 = \int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = 2$$

a a_1 (integrujeme *per-partes*)

$$a_1 = q \int_0^\pi x(\pi - x) \sin x \,\mathrm{d}x = 4q\,.$$

Další členy posloupnosti (pro $n \geq 2$) můžeme získat pomocí rekurentní formule

$$a_n = (4n - 2)q a_{n-1} - (q\pi)^2 \, a_{n-2},$$

jejíž odvození je pro zvýšení přehlednosti přesunuto do přílohy. Dále budeme potřebovat odhadnout hodnotu a_n. K tomu si nejprve uvědomíme, že funkce $x(\pi - x)$ i funkce $\sin x$ jsou v intervalu $(0; \pi)$ kladné, takže určitý integrál a následně i každý člen posloupnosti je kladný. Obě zmíněné funkce dosahují na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$ svého maxima pro $x = \pi/2$, jeho hodnota činí v prvním případě $\pi^2/4$, pro sinus pak 1. V krajních bodech integračního intervalu nabývají obě funkce hodnoty 0 a délka intervalu je π. S těmito znalostmi pak již můžeme uvést odhad

$$0 < a_n < \pi \frac{q^n}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4} \right)^n .$$

V tuto chvíli jsme si připravili veškeré potřebné nástroje, takže můžeme přistoupit k vlastnímu důkazu. Budeme (jak jinak) dokazovat sporem, tj. budeme předpokládat, že lze psát

$$\pi = \frac{p}{q},$$

kde nyní p i q jsou přirozená čísla (víme, že π je rozhodně kladné). Za těchto podmínek jsou a_0 i a_1 přirozená čísla a rekurentní vzorec má po dosazení tvar

$$a_n = (4n-2)qa_{n-1} - p^2 a_{n-2}.$$

Pomocí matematické indukce z toho můžeme odvodit, že a_n je celé číslo pro libovolné n.

Nyní upřeme pozornost k odhadu a_n. Dobře víme, že faktoriál je velmi rychle rostoucí funkce, její růst pro dostatečně velké n vždy převáží nad exponenciální funkcí. Platí tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \pi \frac{(q\pi^2/4)^n}{n!} = 0$$

a pro dostatečně velká n určitě platí[1] $0 < a_n < 1$. Dle rekurentního vzorce je a_n celé číslo, což je s poslední nerovností ve sporu. Z toho vyplývá, že π nelze zapsat ve tvaru zlomku a je to tedy číslo iracionální.

Příloha

Integrály, kde integrand je součinem goniometrické funkce $\sin x$ nebo $\cos x$ a dostatečně hladké (tj. dostatečně derivovatelné) funkce $f(x)$ řešíme metodou *per-partes*. Pokud ji aplikujeme dvakrát za sebou, máme

$$\int f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = -f(x)\cos x + \int f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x = -f(x)\cos x + f'(x)\sin x - \int f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

Pro určitý integrál v rozmezí 0 až π se vztah zjednoduší s využitím hodnot goniometrických funkcí v krajních bodech intervalu na tvar

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = f(0) + f(\pi) - \int_0^\pi f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

V našem případě dosadíme $f(x) = [x(\pi - x)]^n$, pro druhou derivaci spočteme

$$f''(x) = n(n-1)(\pi - 2x)^2\,[x(\pi-x)]^{n-2} - 2n\,[x(\pi-x)]^{n-1}.$$

Protože platí $(\pi - 2x)^2 = \pi^2 - 4\,[x(\pi - x)]$, můžeme poslední vztah upravit na tvar

$$f''(x) = n(n-1)\pi^2\,[x(\pi-x)]^{n-2} - n(4n-2)\,[x(\pi-x)]^{n-1}.$$

Naše funkce $f(x)$ nabývá v obou krajních bodech integračního intervalu nulové hodnoty. Proto po dosazení druhé derivace dostáváme pro a_n vyjádření

$$a_n = \frac{q^n}{n!}\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{q^n}{n!}\int_0^\pi f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = (4n-2)q\frac{q^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^\pi [x(\pi-x)]^{n-1}\sin x\,\mathrm{d}x - (q\pi)^2\,\frac{q^{n-2}}{(n-2)!}\int_0^\pi [x(\pi-x)]^{n-2}\sin x\,\mathrm{d}x$$

a s uvážením definice členů posloupnosti již konečně máme pro $n \geq 2$ hledaný rekurentní vzorec

$$a_n = (4n-2)qa_{n-1} - (q\pi)^2\,a_{n-2}.$$

[1] Členy a_n se shora blíží k 0. Z definice limity $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ platí $a_n < \varepsilon$. Horní odhad získáme pro $\varepsilon = 1$.